Matematicas 5 Segundo Parcial Miguel Guzma Parcial 1-2

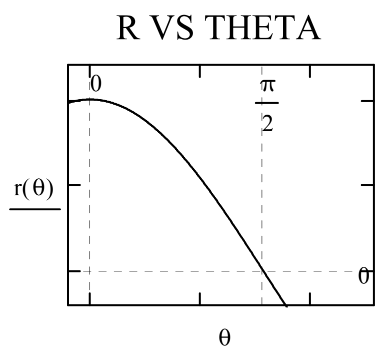
Pregunta (1)

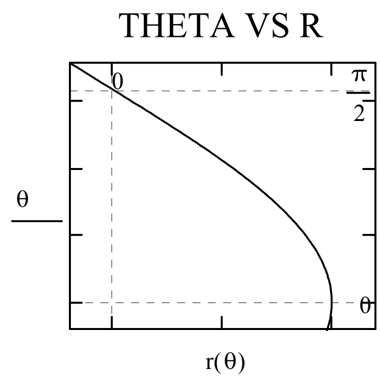
Sea

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(\theta)} \cos(\theta)\, dr\, d\theta$$

Trabajando a r y θ como las variables sabemos (leyendo los limites) que θ va de 0 a π/2 mientras que r va desde 0 a la funcion cos(θ) por lo que graficando estos datos.

$r(\theta) := \cos(\theta)$





Indistintamente el orden de los ejes para lo cual realizo su grafica, note que la region es la ubicada entre 0 y π/2 con los ejes x y y.

Cambiando el orden de integracion se tendra que:

$$I_1 := \int_0^{1} \int_0^{\operatorname{acos}(r)} \cos(\theta)\, d\theta\, dr$$

Resolviendo la primera integral, recordando la formula para angulo medio se tiene:

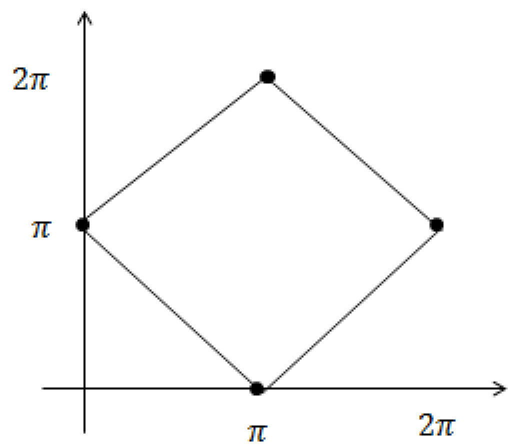
$I \rightarrow \frac{\pi}{4}$ RESPUESTA El otro integrando es mas elaborado sin embargo $I_1 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

Pregunta (2)

Sea $I_2 := \int \int (x - y)^2 \sin(x + y)\, dx\, dy$ en el paralelogramo de vertices

$A := (\pi, 0)$ $B := (2\pi, \pi)$ $C := (\pi, 2\pi)$ $D := (0, \pi)$

Graficamos el paralelogramo.



Realizando el cambio de variable.

$$u_1(x,y) := x - y$$
$$v_1(x,y) := x + y$$

Realizando el despeje de X y Y en terminos de U y V, nos queda

$$x(u,v) := \frac{1}{2}(u+v) \qquad y(u,v) := \frac{1}{2}(v-u)$$

$$T(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(v-u) \end{bmatrix}$$

Probamos que es clase C1. Son polinomios por lo que SI es clases C1.

Probamos que es inyectiva. Es decir T(u1,v1)=T(u,v) si y solo si (u1,v1)=(u,v)

Se tiene $T(u1,v1) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u1}{2} + \frac{v1}{2} \\ \frac{v1}{2} - \frac{u1}{2} \end{pmatrix}$ igual $T(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \end{pmatrix}$

Por lo que se tiene dos ecuaciones (1) $u1 + v1 = u + v$ (2) $v1 - u1 = v - u$

Sumando (1)+(2) se tiene $v1 = v$

Sustituyendo en (1) $u1 = u$ por lo que se demuestra que

T(u1,v1)=T(u,v) si y solo si (u1,v1)=(u,v)

SI ES INYECTIVA

Buscamos Jacobiano

$$\text{Jacobiano}(u,v) := \left|\left|\begin{pmatrix} \frac{d}{du}x(u,v) & \frac{d}{dv}x(u,v) \\ \frac{d}{du}y(u,v) & \frac{d}{dv}y(u,v) \end{pmatrix}\right|\right| \rightarrow \frac{1}{2}$$

Ahora parametrizamos la frontera de la region y aplicamos cambio de variable

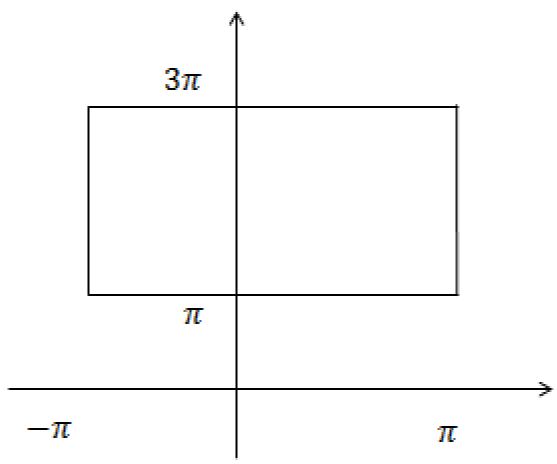
$C1 := \left| \begin{array}{l} y = -x + \pi \\ 0 \le x \le \pi \end{array} \right.$ cambio $C1estrella := \left| \begin{array}{l} v = \pi \\ -\pi \le u \le \pi \end{array} \right.$

$C2 := \left| \begin{array}{l} y = x - \pi \\ \pi \le x \le 2\pi \end{array} \right.$ cambio $C2estrella := \left| \begin{array}{l} u = \pi \\ \pi \le v \le 3\pi \end{array} \right.$

$$C3 := \begin{vmatrix} y + x = 3\pi \\ \pi \le x \le 2\pi \end{vmatrix} \quad \text{cambio} \quad C3estrella := \begin{vmatrix} v = 3\pi \\ -\pi \le u \le 3\pi \end{vmatrix}$$

$$C4 := \begin{vmatrix} y - x = \pi \\ 0 \le x \le \pi \end{vmatrix} \quad \text{cambio} \quad C4estrella := \begin{vmatrix} u = -\pi \\ \pi \le v \le 3\pi \end{vmatrix}$$

Graficando la nueva region.



Cambiando la integral

$$I_4 := \int \int u^2 \sin(v) \cdot \text{Jacobiano}\, du\, dv$$

Sobre D estrella, como es un cuadrado, no importa el orden por lo que:

$$I_4 := \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \cdot \sin(v) \cdot \text{Jacobiano}\, dv\, du \to 0$$

RESP

Haciendo la integral original es un poco mas elaborado.

$$I_2 := \int_0^{\pi} \int_{\pi-x}^{x+\pi} (x-y)^2 \sin(x+y)\, dy\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \int_{x-\pi}^{3\pi-x} (x-y)^2 \sin(x+y)\, dy\, dx \to 0$$

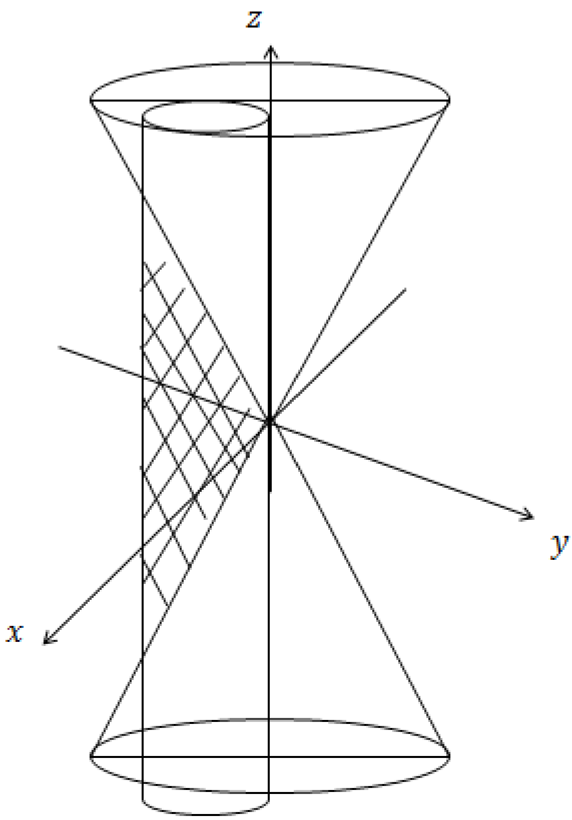
En efecto la respuesta es 0 (cero) SI PUEDE SER CEROOOOO, NO ES AREA.

Pregunta (3)

Se tiene las ecuaciones $z^2 = x^2 + y^2$ y $(x-1)^2 + y^2 = 1$

La primera es un CONO que abre hacia arriba y hacia abajo. Y la segunda un CILINDRO desplazado en eje X.

Realizando la grafica, observamos el volumen ACOTADO, **<u>FINITO.</u>**



Coordenadas cilindricas. (The easiest)

$$V := \int \int \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1\, dz\, dx\, dy$$

Por lo que queda

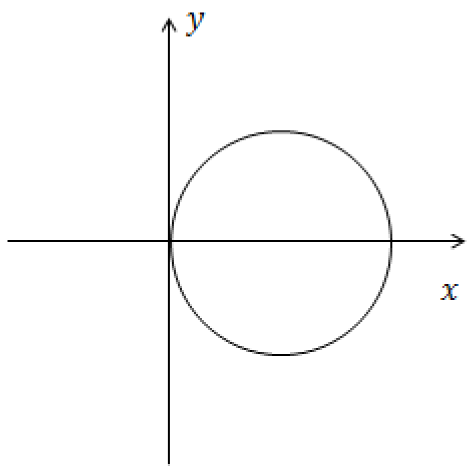
$$V := \int \int 2\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

De la proyeccion se aplica, coordenadas polares, se tiene.

$$V := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos(\theta)} 2r \cdot r\, dr\, d\theta \rightarrow \frac{64}{9}$$

RESPUESTA

Proyeccion.



Observamos que las variables

r va de 0 a circunferencia

Demostrando la dependencia de r con el valor theta se tiene

$$r_{circun} := 2\cos(\theta)$$

Y la variable theta va de -π/2 a π/2

Coordenas Esfericas (Bueee, uds es un aventurero)

Estableciendo las variables se tendra que

Rho va desde 0 hasta cilindro. Sustituyendo el cambio esferico en la ecuacion del cilindro se obtiene que

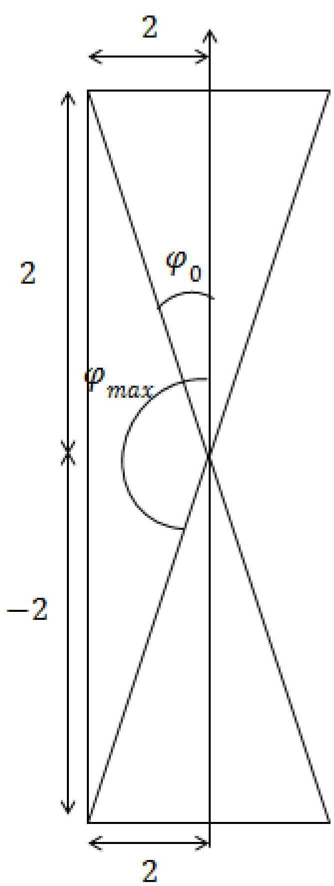
$$\rho_{cilindro} := 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\varphi)}$$

Theta va desde -π/2 a π/2 (too easy)

Phi va desde un φ0 hasta un φmax donde se busca la interseccion cilindro/cono

Se obtiene que $z^2 - 2x = 0$ para la altura Z se obtiene para x=2 implica $|z| = 2$

De los triangulos se obtiene



$$\varphi 0 := \operatorname{atan}(1) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_{max} := \operatorname{atan}(-1) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$ como tambien

$$\varphi_{max} := \frac{3}{4}\pi$$

Estableciendo la integral para esfericas

$$V_{esferas} := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\varphi)}} \rho^2 \cdot \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$V_{esferas} \rightarrow \frac{64}{9}$$ RESPUESTA

Pregunta (4)

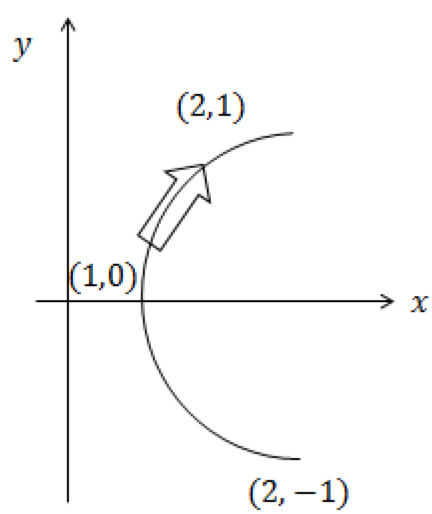
Dada la TRAYECTORIA definida por sigma, dibujamos la region.

Llamamos $x(t) := 2 + \sin(t)$ $y(t) := \cos(t)$ en el intervalo tε(π,2π)

Graficamos 3 puntos para conocer la region. $\sigma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\sigma(\pi) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\sigma\left(\frac{3}{2}\pi\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\sigma(2\pi) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo que sera, semi circunferencia recorrida sentido HORARIO.



Para utilizar Green debemos cerrar la trayectoria. Eso es agregar una recta x=2, ademas debemos demostrar que la funcion F(x,y) es DIFERENCIABLE. Por lo que se debia demostrar la composicion de la exponencial. Y argumentar que los otros terminos eran diferenciables por ser polinomios.

Sea la funcion

$$F(x_1, y_1) := \begin{pmatrix} e^{x_1 \cdot \cos\left(\ln\left(2+\sqrt{|x_1|}\right)\right)} + 4x_1 \cdot y_1 - 3y_1 + 3 \\ 2x_1^{\ 2} - x_1 + 3y_1^{\ 2} \end{pmatrix}$$

Nota: Para efecto del programa llame x e y como x1 y y1. Nada mas.

Entonces cerrando la trayectoria S=σuL. Y realizando el teorema de green

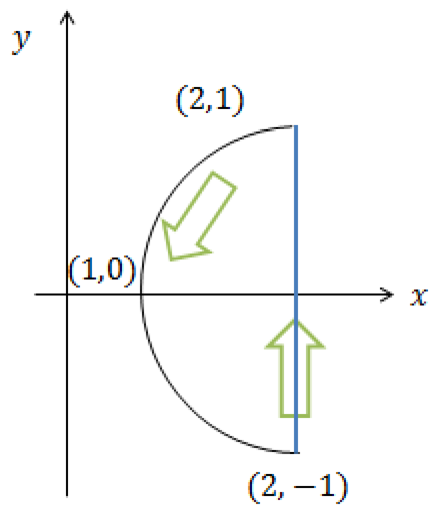
$$\int \left[e^{x_1 \cdot \cos\left(\ln\left(2+\sqrt{|x_1|}\right)\right)} + 4x_1 \cdot y_1 - 3\left(y_1 + 3\right)\right] \cdot dx + \left(2x_1^{\ 2} - x_1 + 3y_1^{\ 2}\right) dy$$ es igual

$$\int\int \frac{d}{dx}Q - \frac{d}{dy}P \, dx \, dy$$

Buscamos las parciales.

$$\frac{d}{dx_1}F(x_1,y_1)_{1,0} \rightarrow 4\cdot x_1 - 1 \qquad\qquad \frac{d}{dy_1}F(x_1,y_1)_{0,0} \rightarrow 4\cdot x_1 - 3$$

Por lo que $$\frac{d}{dx_1}F(x_1,y_1)_{1,0} - \frac{d}{dy_1}F(x_1,y_1)_{0,0} \rightarrow 2$$



Nos queda que la integral sobre la trayectoria S

$$\int F\,ds = 2\int\int 1\,dx\,dy$$

Lo que significa que

$$\int F\,ds = 2\,Area$$

El area sera $$Area := \frac{\pi\,(1)^2}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Por lo que $$\int F\,ds = \pi$$ SENTIDO GREEN

A esta integral se le resta la trayectoria agregada, parametrizamos

$$l := \left|\begin{array}{l} x = 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{array}\right. \qquad l(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Derivando $$\frac{d}{dt}l(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la parametrizacio en la funcion. $$F(2,t) \rightarrow \begin{pmatrix} 5\cdot t + e^{2\cdot\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}+2\right)\right)} + 3 \\ 3\cdot t^2 + 6 \end{pmatrix}$$

Realizando la integral de linea por definicion.

$$\int_{-1}^{1} F(2,t)\cdot\frac{d}{dt}l(t)\,dt \rightarrow 14$$

Esta integral corresponde a la parametrizacion, verificamos sentidos, y corresponde por lo que se concluye que

$$\int F\,dl = 14$$ con sentido GREEN, a esta se le Resta la obtenida sobre la trayectoria S

Y nos queda $\int F\,d\sigma = \pi - 14$ CON SENTIDO GREEN

Finalizamos el ejercicio comparando las trayectorias. Sentido Original con el GREEN

Son opuestos. $\int F\,d\sigma = 14 - \pi$ RESPUESTA